

**Lösungsvorschlag - Klausur zu
Theoretischen Physik 1a: Klassische Mechanik**

SoSe 2025

24.07.2025

Name: _____

Matrikelnummer: _____

- Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und ihre Matrikelnummer.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte	10	10	10	10	40
Korrektur					

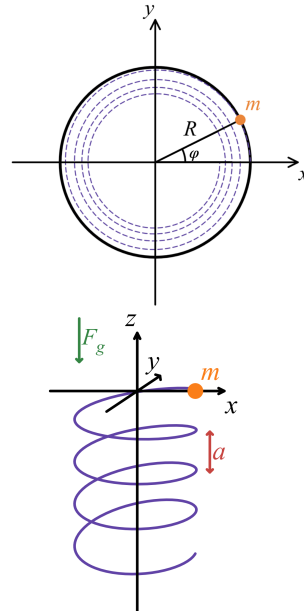
1. Punktmasse auf eine Spirale

10 Punkte

Eine Punktmasse m befindet sich im Schwerfeld auf einer Spirale mit Radius R und vertikalem Abstand zwischen den Lagen a . Hierbei steht die z -Achse senkrecht zum Boden.

- Bestimmen Sie die Lagrangefunktion mit φ (siehe Bild) als verallgemeinerte Koordinate.
- Finden Sie die Zeit, in der die Masse auf eine Höhe mit $z = -z_0$ herabfällt. Die nötigen Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t=0) &\equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (t=0) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{\vec{r}}(t=0) &= \vec{0}.\end{aligned}$$



Lösung: Lagrange 2.Art**(a)**

Zwei naheliegende Optionen für die verallgemeinerte Koordinate sind der Winkel ϕ oder die Höhe z . Mögliche Parameterisierungen der Schraubenlinie sind dann

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ -\frac{a}{2\pi}\varphi \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\frac{2\pi}{a}z) \\ \pm R \cdot \sin(\frac{2\pi}{a}z) \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Wir verwenden ϕ , wie im Hinweis zu dieser Aufgabe angegeben. Man erhält für die kinetische und potentielle Energie, so wie für die Lagrange-Funktion die folgenden Ausdrücke:

$$T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m((R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\left(R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\right)\dot{\varphi}^2 \quad (2)$$

$$V(\varphi) = -\frac{a}{2\pi}mg\varphi \quad (3)$$

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{a}{2\pi}mg\varphi \quad (4)$$

(b)

Um die Zeit zu bestimmen in welcher die Masse auf eine Höhe $z = -z_0$ herabgefallen ist, müssen wir die Bewegungsgleichungen lösen.

Diese erhalten wir mittels der Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\left(R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\right)\ddot{\varphi} \stackrel{!}{=} \frac{a}{2\pi}mg = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = \overbrace{\frac{a}{2\pi}g \cdot \left(R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\right)^{-1}}^{=: \lambda} \quad (6)$$

Die Winkelbeschleunigung ist also konstant und die zweifache Integration, mit Integrationskonstanten A, B ergibt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\varphi}(t) &= \lambda t + A \\ \Rightarrow \varphi(t) &= \frac{1}{2}\lambda t^2 + At + B \end{aligned} \quad (7)$$

Die Integrationskonstanten A, B bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen

$$z(0) = -\frac{a}{2\pi}\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (8)$$

$$\dot{r}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{\varphi} = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (9)$$

Somit folgt die Lösung

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\lambda t^2 \quad (10)$$

Schließlich erhält man die gesuchte Zeit t , indem man $z = -z_0$ nach t auflöst:

$$\begin{aligned} z(t) &= -\frac{\lambda a}{4\pi}t^2 \stackrel{!}{=} -z_0 \\ \Rightarrow t &= \sqrt{\frac{4\pi z_0}{\lambda a}} \end{aligned}$$

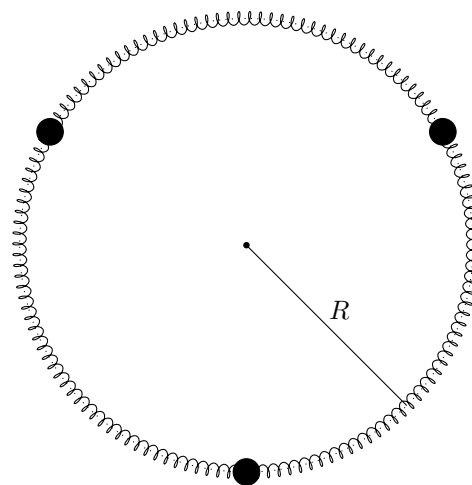
2. Kreisförmig gekoppelte Oszillatoren

10 Punkte

Drei identische Punktmassen m befinden sich auf einem Kreisring mit Radius R . Jede Masse sei mit ihrer Nachbarmasse über eine identische Feder mit Federkonstante k verbunden. (Siehe Abbildung)
Nehmen Sie für das Potential einer Feder, welche die Massen m_i und m_j verbindet die Form

$$V_{ij} = \frac{k}{2}(\phi_i - \phi_j)^2$$

an, wobei die Winkel ϕ_i , $i = 1, 2, 3$ die Winkel der Punktmassen bezüglich eines gemeinsamen, beliebigen Referenzpunktes auf dem Kreis sind.



- Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Matrizen $\hat{T}$, $\hat{K}$ auf.
- Bestimmen Sie die Eigenwerte (Eigenfrequenzen).
- Bestimmen Sie die Eigenvektoren (Eigenschwingungen)

• **Hinweis:**

Für den doppelt vorkommenden Eigenwert müssen Sie zwei orthogonale Eigenvektoren finden.

Sie werden feststellen, dass in diesem Fall die Gleichung für die Eigenvektoren $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ nur

eine Bedingung für die drei unbekannten Parameter a , b , c liefert. Damit kann man z.B. c als Funktion von a und b bestimmen. Aufgrund der beliebigen Normalisierung können Sie dann $a = 1$ wählen, aber es besteht immer noch die Freiheit b zu bestimmen. Sie können jetzt b einen

beliebigen Wert $b = b_1$ zuweisen. Dies liefert Ihnen den ersten Eigenvektor, $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$. Sie

finden den Zweiten, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$, indem Sie $A^{(1)} \cdot A^{(2)} = 0$ verlangen.

Lösung : Kreisförmige gekoppelte Oszillatoren

(a)

Die verallgemeinerten Koordinaten für dieses Problem können als die Winkel ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 gewählt werden. Der Kreisring hat den festen Radius R . Das Potential V_{ij} zwischen zwei Massen war gegeben und summieren über i, j , ohne doppelt Zählung, ergibt das Potential des Systems:

$$\begin{aligned} U &= V_{12} + V_{23} + V_{31} \\ &= \frac{k}{2} [\phi_1^2 - \phi_1\phi_2 - \phi_2\phi_1 + \phi_2^2 + (1 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 3)] \\ &= \frac{k}{2} [2\phi_1^2 + 2\phi_2^2 + 2\phi_3^2 - \phi_1\phi_2 - \phi_2\phi_1 - \phi_2\phi_3 - \phi_3\phi_2 - \phi_3\phi_1 - \phi_1\phi_3]. \end{aligned} \quad (11)$$

Die kinetische Energie ist durch $T = \frac{m}{2} R^2 \sum_{i=1}^3 \dot{\phi}_i^2$ gegeben. Damit folgt die Lagrange-Funktion aus $L = T - U$ durch Einsetzen dieser Ausdrücke.

Die Matrizen kann man an der kinetischen Energie und dem Potential ablesen:

$$\hat{T} = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\hat{K} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

(b)

Für die Schwingungen auf dem Kreis berechnen wir nun die Eigenfrequenzen. Dazu lösen wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\hat{K} - \lambda \hat{T}) = \det \begin{pmatrix} 2k - \lambda mR^2 & -k & -k \\ -k & 2k - \lambda mR^2 & -k \\ -k & -k & 2k - \lambda mR^2 \end{pmatrix} \\ &= k^3 \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda \frac{mR^2}{k} & -1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \frac{mR^2}{k} & -1 \\ -1 & -1 & 2 - \lambda \frac{mR^2}{k} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

wobei wir den Faktor k^3 fallen lassen können. Wir definieren

$$\eta = \lambda \frac{mR^2}{k}$$

und werten die Determinante aus :

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \eta & -1 & -1 \\ -1 & 2 - \eta & -1 \\ -1 & -1 & 2 - \eta \end{pmatrix} = (2 - \eta)^3 - 1 - 1 - (2 - \eta) - (2 - \eta) - (2 - \eta) = \eta(\eta^2 - 6\eta + 9) = \eta(\eta - 3)^2. \quad (15)$$

In dieser faktorisierten Form können wir die Nullstellen ablesen, erhalten als:

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = \eta_3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3k}{mR^2}.$$

(c)

Um die Eigenvektoren zu bestimmen, schreiben wir allgemein

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Wir müssen das System linearer Gleichungen

$$0 = \begin{pmatrix} 2-\eta & -1 & -1 \\ -1 & 2-\eta & -1 \\ -1 & -1 & 2-\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (16)$$

für die gefundenen Werte von η lösen.

Wir betrachten zunächst den Fall $\eta = \eta_1 = 0$. Das liefert

$$0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b - c \\ -a + 2b - c \\ -a - b + 2c \end{pmatrix} \quad (17)$$

Dies sind drei Gleichungen, doch nur zwei sind linear unabhängig: Z.B. Ergibt die Summe der zweiten und dritten Gleichung, die erste Gleichung (bis auf ein Minuszeichen). Somit haben wir zwei Gleichungen für drei Unbekannte a, b, c , weshalb Eine beliebig gewählt werden kann. Das ist zu Erwarten, denn die Normierung der Eigenvektoren ist beliebig. Wir nutzen das um $a = 1$ zu setzen. Damit haben wir nun zwei unabhängige Gleichungen $2b - c = 1$ und $2c - b = 1$ mit der Lösung $b = 1, c = 1$. Somit ergibt sich der Eigenvektor

$$\eta_1 = 0 : \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun den Fall $\eta = \eta_2 = \eta_3 = 3$. Dann haben wir

$$0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - b - c \\ -a - b - c \\ -a - b - c \end{pmatrix} \quad (18)$$

Nun sind alle drei Gleichungen dieselbe, weshalb wir nur eine Bedingung für die drei Unbekannten haben:

$$a + b + c = 0.$$

Wir zuvor können wir $a = 1$ setzen um die Normierung zu fixieren. Jeder Vektor der Form

$$\eta_{2,3} = 3 : \quad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 - b \end{pmatrix} \quad (19)$$

erfüllt unsere Gleichung. Da wir die Aufgabe haben eine Basis von Funktionen zu finden nach welcher wir alle kleinen Schwingungen entwickeln können, sollten wir zwei orthogonal Vektoren $A_2 = (1, b_2, -1 - b_2)$ und $A_3 = (1, b_3, -1 - b_3)$ mit festen Werten b_2, b_3 finden, so dass jeder Vektor der obigen Form (also für beliebiges b) als eine Linearkombination geschrieben werden kann:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 - b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ -1 - b_2 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ b_3 \\ -1 - b_3 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Dazu können wir eine der Zahlen b_2, b_3 frei wählen und erhalten die Andere von der Bedingung, dass die beiden Basisvektoren orthogonal sein sollen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ -1 - b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ b_3 \\ -1 - b_3 \end{pmatrix} := 0 \quad (21)$$

Wählt man $b_2 = 1$, so wird die Orthogonalitätsbedingung:

$$0 = 1 + b_3 + 2(1 + b_3) = 3 + 3b_3 \Rightarrow b_3 = -1.$$

Daraus erhält man als Lösung

$$\eta_{2,3} = 3 : \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Bemerkung: Der Hinweis, zwei orthogonale Vektoren $A_2 \cdot A_3 = 0$ zu finden, ist eine Vereinfachung, die für den vorliegenden Fall gültig ist, da die kinetische Energiematrix $\hat{T}$ diagonal ist. Im Allgemeinen müssen A_2 und A_3 aus der Bedingungen

$$A_2^T \hat{T} A_3 \stackrel{!}{=} 0, \quad \text{und} \quad A_2^T \hat{K} A_3 \stackrel{!}{=} 0 \quad (23)$$

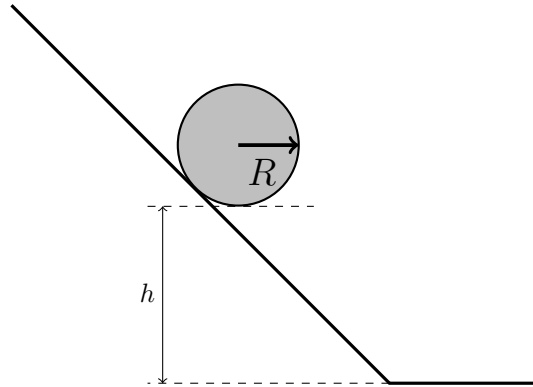
bestimmt werden. Da $\hat{T}$ diagonal ist, ist die erste Bedingung äquivalent zu $A_2 \cdot A_3 = 0$, und die zweite wird automatisch erfüllt, da es keine freien Parameter mehr gibt. Tatsächlich, unter Verwendung der Ausdrücke in (22)

$$A_2^T \hat{K} A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}^T k \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = k(1, 1, -2) \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

3. Zylinder auf schiefe Ebene

10 Punkte

Ein homogener Zylinder mit Radius R und einer Masse M rolle eine schiefe Ebene mit der Steigung a herunter, siehe Bild. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach dem Durchlaufen der Höhe h ? (Anfangsbedingung: am Anfang ist die Geschwindigkeit gleich Null)



- **Hinweis:**

Die kinetische Energie eines rollenden Zylinders hat zwei Anteile die der Translationsbewegung und der Rotation entsprechen. Für den zweiten Beitrag muss man zunächst das Trägheitsmoment des Zylinders berechnen.

Lösung: Schiefe Ebene

Es gilt Energieerhaltung:

$$E_{pot}|_{Anfang} = E_{kin}|_{Ende} \quad (25)$$

wobei E_{kin} hat zwei Anteile: Rotation und Schwerpunktsbewegung. Es folgt

$$Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \quad (26)$$

wobei ω is die Winkelgeschwindigkeit. Offensichtlich $\omega = v/R$. Einsetzen liefert

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{\frac{I}{R^2} + M}} \quad (27)$$

Die Dichte ρ_0 berechnet sich folgendermaßen

$$M = \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi dz = \rho_0 2\pi L \frac{1}{2} R^2 \quad (28)$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{M}{\pi L R^2}, \quad (29)$$

wobei L die Länge des Zylinders und M die Masse ist. Wir berechnen das Trägheitsmoment durch den Schwerpunkt bzgl. der Symmetrieachse des Zylinders unter Benutzung der Zylinderkoordinaten

$$I_{zz} = \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^R r^2 r dr d\phi dz = 2\pi L \rho_0 \frac{1}{4} R^4 = \frac{MR^2}{2} \quad (30)$$

Einsetzen

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + \frac{M}{2R^2} R^2}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}} \quad (31)$$

4. Teilchenzusammenprall

10 Punkte

Ein Teilchen der Masse m_1 werde im Ursprung festgehalten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ruhe ein zweites Teilchen der Masse m_2 im Abstand $x_0 > 0$ vom Ursprung. Berechnen Sie die Zeit, die das zweite Teilchen benötigt, bis es unter dem Einfluss der Gravitation auf das erste Teilchen prallt.

- **Hinweis:** Folgendes Integral kann nützlich sein:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z}(1+z)^n} = \frac{\pi(2n)!}{\left(n - \frac{1}{2}\right) 4^n (n-1)! n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lösung: Teilchenzusammenprall

Energieerhaltg. ($x \geq 0$):

$$E = \frac{m_2}{2} \dot{x}^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{x} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{x_0} \quad (32)$$

Daher

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2m_1 \gamma} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}} \quad (33)$$

Zeit bis zum Aufprall

$$t = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{2m_1 \gamma}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}} = \frac{x_0^{3/2}}{\sqrt{2m_1 \gamma}} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z}(1+z)^2}, \quad (34)$$

wobei $z = \frac{x_0}{x} - 1$ substituiert wurde. Endergebnis

$$t = \frac{\pi x_0^{3/2}}{2\sqrt{2m_1 \gamma}}. \quad (35)$$